FORMULAIRE D'ELECTRONIQUE

E18 — CIRCUITS TRIPHASES

CIRCUITS TRIPHASES : **Un générateur de tensions triphasées (montages en étoile et en triangle) fournit trois tensions alternatives de même amplitude décalées d'un tiers de période.**

1. Montage en étoile

I phase = I enroulement

V entre phases = V enroulement × $\sqrt{3}$

Remarques

– La tension monphasée est la tension entre phase et neutre.
– La valeur de $\sqrt{3}$ est 1,732.

Application numérique

Pour une tension monophasée de 220 V, la tension entre phases est de 220 × 1,732, soit 380 V.

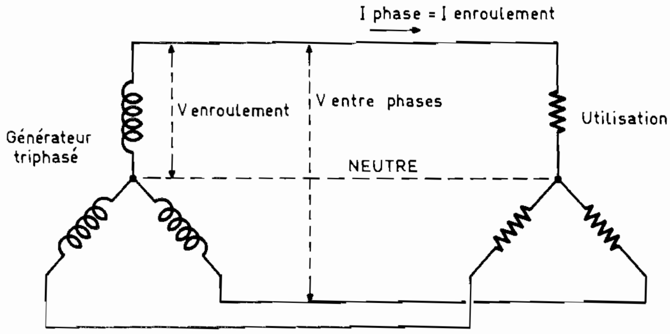
2. Montage en triangle

I phase = I enroulement × $\sqrt{3}$

V entre phases = V entre enroulements

Dans les montages triphasés (en étoile et en triangle), la puissance apparente est égale à trois fois la puissance fournie par un enroulement.

P apparente = 3 (I enroulement × V enroulement)



Calcul — MANIPULATION DES VALEURS COMPLEXES

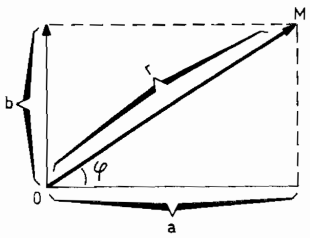
VALEURS COMPLEXES : **Leur utilisation permet de simplifier considérablement le calcul des circuits en alternatif.**

Le vecteur incliné OM de longueur r et de décalage φ peut être représenté sous plusieurs formes :

– Forme cartésienne (ou rectangulaire)

OM = a + jb

a = terme « réel »
jb = terme « complexe » ou « imaginaire ».



– Forme exponentielle

OM = r $e^{j\varphi}$

r = longueur du vecteur OM (ou « module »)
φ = décalage du vecteur OM (ou « argument ») par rapport à l'axe des abcisses (axe horizonral)
e = base des logarithmes népériens (= 2,71828).

– Forme polaire

OM = r / φ

– Forme trigonométrique

OM = r (cos φ + j sin φ)

Remarques

– « jb » n'est pas un produit de facteurs, il symbolise seulement un vecteur vertical de longueur égale à b ;
– dans les développements de calculs, on utilise les relations :

$\frac{1}{j} = -j$ et $j = \sqrt{-1}$

soit : $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = +1$...

Calcul de r et de φ, connaissant a et b

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\varphi = \text{arctg}\,\frac{b}{a}$

Calcul de a et b, connaissant r et φ

$a = r \cos \varphi$ $b = r \sin \varphi$

OPERATIONS COMPLEXES

– Egalité

(a + jb) = (c + jd), si a = c et b = d

– Addition

(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j (b + d)

FORMULAIRE D'ELECTRONIQUE

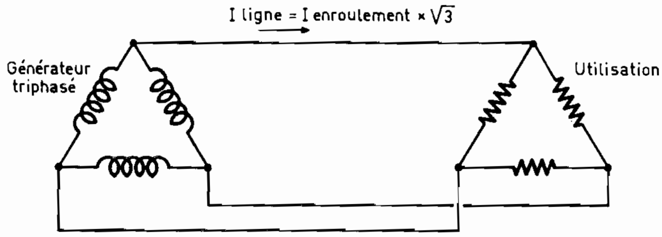
En considérant la tension entre phases, et le courant ligne :

P apparente = $\sqrt{3}$ (I ligne × V entre phases)

Dans les deux montages, la puissance active est donnée par la formule :

P active = P apparente × cos φ

Unités :
- puissance « apparente » en volt-ampères (VA) ;
- puissance « active » en watts (W).



Application numérique

Un générateur triphasé en étoile fournit une tension de 5 000 V entre phases. Le courant dans chaque phase est de 20 A. Le générateur alimente une installation dont le cos φ est de 0,90. On désire connaître la tension entre phase et neutre, ainsi que la puissance apparente et la puissance active du générateur.

Tension entre phase et neutre : 5 000/1,732 = 2 886,83 V.

Puissance apparente fournie par un enroulement :
2 886,83 × 20 = 57 736,72 VA ou 57,73 kVA.

Puissance apparente fournie par le générateur :
57,73 × 3 = 173,2 kVA.

Puissance active fournie par le générateur :
173,2 × 0,90 = 155,9 kW.

NOTES..
....
....

– Soustraction

$(a + jb) - (a + jd) = (a - c) + j\,(b - d)$

● Remarque pratique : L'addition et la soustraction de nombres complexes ne peuvent s'effectuer que lorsque les quantités sont sous la forme cartésienne.

– Produit

module = produit des modules
décalage = somme des décalages

$z_1 \,.\, z_2 = r_1 \,.\, r_2 / \varphi_1 + \varphi_2$

● Remarque importante : $(a + jb)\,(a - jb) = a^2 + b^2$

– Division

module = quotient des modules
décalage = différence des décalages

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \;/ \varphi_1 + \varphi_2$$

– Inverse

module = inverse du module
décalage = le même, mais changé de signe

$$\frac{1}{r / \varphi} = \frac{1}{r} / -\varphi$$

– Puissance n

module = module à la puissance n
décalage = décalage n fois plus grand

$z^n = r^n / n\varphi$

● Formulaire de Moivre :

$(\cos \varphi + j \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + j \sin n\varphi$

– Racine carrée

module = racine carrée du module
décalage : décalage divisé par 2

$\sqrt{z} = \sqrt{r} / \varphi/2$

Remarques

1° Suppression de a + jb au dénominateur :
on multiplie par (a – jb) le numérateur et le dénominateur.

Ceci donne : $(a + jb)\,(a - jb) = a^2 - b^2$;
les j disparaissent (la quantité a – jb est appelée la valeur conjuguée de a + jb).
2° Rotation d'un vecteur d'un angle α quelconque : il suffit de multiplier son expression complexe par ($\cos \alpha \pm j \sin \alpha$). On prend le signe + ou le signe – suivant le sens de rotation.

Application numérique

Se reporter aux fiches : impédance (forme complexe) et résonance.

E19 — IMPEDANCE (FORME COMPLEXE)

IMPEDANCE COMPLEXE : **L'utilisation du facteur j dans le calcul des circuits en régime alternatif sinusoïdal présente des avantages de simplicité et de rapidité.**

$Z = R \pm j\,X$
(formule générale : résistance en série avec une réactance)

$Z = R + jL\omega$ (résistance en série avec une inductance)

$Z = R - \frac{j}{C\omega}$ ou $Z = R + \frac{1}{jC\omega}$ (résistance en série avec un condensateur)

$Z = R + j \quad L\omega - \frac{1}{C\omega}$ (résistance, inductance et condensateur en série)

Le facteur j est également utilisé dans la représentation d'une impédance sous la forme : $Z\,e^{j\varphi}$ ou $Z \,/\, \varphi$

avec Z = **valeur réelle** de l'impédance en ohms (Ω).

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$

et φ = angle de déphasage (en degrés ou en radians) du courant dans l'impédance par rapport à la tension à ses bornes.

$\varphi = \mathrm{arctg}\ \frac{X}{R}$

e = base des logarithmes népériens (2,71828)
R = résistance du circuit en ohms (Ω)
X = réactance du circuit en ohms (Ω) (voir fiche E_{15} : Réactance et impédance).

Connaissant Z et le déphasage φ, les valeurs de R et X sont données par les formules :

$R = Z \cos \varphi$ et $X = Z \sin \varphi$

Un signal alternatif sinusoïdal (tension ou courant) peut aussi être représenté sous la forme complexe :

$v = V \sin (\omega t \pm \varphi)$ (forme classique)

$v = V (\cos \varphi \pm j \sin \varphi)$ (forme trigonométrique)

$v = V e^{\pm j\varphi}$ ou $v = V \,/ \pm \varphi$ (formes exponentielle et polaire)

(Se reporter la fiche E_{13} : Déphasage.)

Application numérique

On désire connaître les valeurs des composants R et X de l'impédance $700 \,/ + \mu/3$.
Ces valeurs sont :
$R = 700 \cos \pi/3 = 350\ \Omega$, et $X = 700 \sin \pi/3 = 606\ \Omega$.

GROUPEMENT D'IMPEDANCES

– En série :
$$Z = z_1 + z_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j\,(b_1 + b_2)$$

avec a = composante résistive, et b = composante réactive.

– En parallèle : $Z = \frac{z_1 \times z_2}{z_1 + z_2}$

E20 — RESONANCE

RESONANCE : **Il y a résonance dans un circuit alternatif lorsque la réactance capacitive compense exactement la réactance inductive.**

La résonance a lieu lorsque : $L\omega = \frac{1}{C\omega}$

RESONANCE SERIE

L'impédance Z ($= \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}$) prend la valeur : Z = R d'où les relations suivantes :

$LC\omega^2 = 1 \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Fréquence de résonance

$F = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ (formule de base, dite « de Thomson »)

F = fréquence pour laquelle apparaît la résonance, en hertz (Hz)
L = inductance en henrys (H)
C = capacité en farads (F)
$\pi = 3{,}1416$.

$LCF^2 = 253 \times 10^2$ (formule pratique)

F = fréquence de résonance en mégahertz (MHz)
L = inductance en microhenrys (μH)
C = capacité en picofarads (pF).

Coefficient de surtension

$Q = \frac{X}{R}$ soit : $Q = \frac{L\omega}{R}$ ou $Q = \frac{1}{RC\omega}$

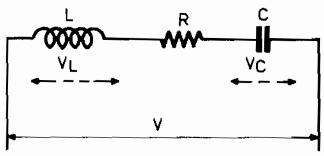
La valeur Q renseigne sur la qualité du circuit. C'est le nombre de fois qu'il faut multiplier la tension appliquée V pour obtenir les tensions V_L et V_C.

Caractéristiques d'une résonance série

– L'impédance du circuit série est minimale (Z = R).

– Le courant I est maximal (I = V/R).

– La tension V_C aux bornes de C est égale à la tension V_L aux bornes de L. Ces tensions sont égales à la tension appliquée V multipliée par Q ($V_C = V_L = V \times Q$).



– Le courant I est en phase avec la tension V.

Application numérique

Quelle est la fréquence de résonance du circuit ci-contre ? Quelle est la valeur de la tension aux bornes de C à la résonance, si la tension V du générateur est de 500 μV ?

FORMULAIRE D'ELECTRONIQUE

Admittance

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{r/\varphi} = \frac{1}{r}/-\varphi$$

soit $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $/-\text{arctg}\ \frac{b}{a}$ (forme polaire)

On a également :

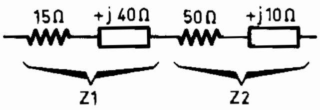
$$y = \frac{1}{a+jb} = \frac{a-jb}{a^2+b^2}$$ (forme rectangulaire)

Remarque

+ j en impédance donne – j en admittance.

Applications numériques

1° Quelle est la valeur de l'impédance constituée de Z_1 et Z_2 en série.

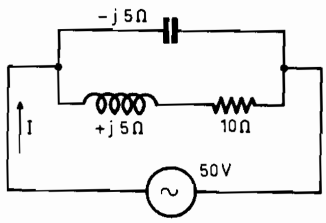


$$Z = (15 + j40) + (50 + j10)$$
$$= (15 + 50) + j\,(40 + 10)$$
$$= 65 + j50$$

Valeur réelle de l'impédance :
$\sqrt{(65)^2 + (50)^2} = \sqrt{4\,225 + 2\,500} = 82\ \Omega$

Déphasage φ apporté par l'impédance :
arctg 50/65 = 0,65 radians ou 37,5°.

2° Rechercher la valeur de l'impédance du circuit ci-contre, ainsi que la valeur du courant I.



Les deux branches ont pour impédance :
$z_1 = 10 + j5$ et $z_2 = -j5$.

La valeur de l'impédance du circuit parallèle est donnée par la formule : $Z = \frac{z_1 \times z_2}{z_1 + z_2}$

soit

$$\frac{(10 + j5)(-j5)}{10 + j5 - j5} = \frac{25 - j50}{10} = 2{,}5 - j5$$ (forme cartésienne)

La valeur réelle de l'impédance est donnée par :
$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, soit $\sqrt{(2{,}5)^2 + (5)^2} = 5{,}6\ \Omega$.

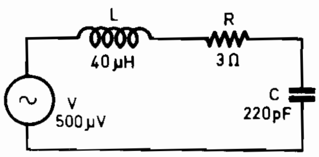
L'angle de déphasage est : arctg $\frac{-5}{2{,}5}$ soit – 63,43°.

L'impédance présentée sous la forme exponentielle est :
$56\,/-63{,}43°$.

Le courant dans le circuit est : I = V/Z, soit :

$$\frac{50}{5{,}6\,/\,63{,}43°} = 8{,}9\,/+63{,}43° \text{ ampères.}$$

Le courant, présenté sous la forme classique, est :
$I = 8{,}9 \sin(\omega t + 63{,}43°)$ ampères.



La formule pratique nous donne :

$$F^2 = \frac{253 \times 10^2}{40 \times 220} = 2{,}875$$

soit la fréquence de résonance : F = 1,695 MHz.
Le coefficient de surtension Q est égal à :

$$\frac{L\omega}{R} = \frac{40 \times 10^{-6} \times 1{,}695 \times 10^6 \times 2 \times 3{,}14}{3} \simeq 142$$

La tension aux bornes de C est :

$500 \times 10^{-6} \times 142$, soit 71 mV.

Résonance parallèle (ou « antirésonance »)

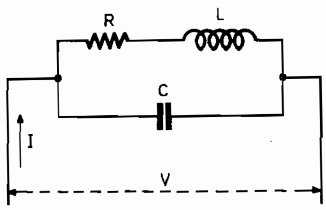
La condition de résonance est la même que pour la résonance série.
La fréquence de résonance est donnée par la même formule.
Le courant I dans le circuit est en phase avec la tension appliquée U, mais :
– l'impédance du circuit est maximale :

$$Z = \frac{L}{CR}$$

– le courant I est minimal ;
– le courant dans la branche inductrice est égal au courant dans la branche capacitive. Ces courants sont égaux au courant I multiplié par Q ($I_L = I_C = I \times Q$)

Application numérique

Retrouver la formule de l'impédance à la résonance en utilisant la notation j.



On a $z_1 = R + jL\omega$ et $z_2 = -j/C\omega$

$$Z = \frac{z_1 + z_2}{z_1 + z_2} = \frac{(R + jL\omega)(-j/C\omega)}{R + jL\omega - j\,1/C\omega} = \frac{L/C - j\,R/C\omega}{R + j\,(L\omega - 1/C\omega)}$$

Le rapport L/C étant très supérieur à R/Cω, ce dernier terme peut être négligé. Au dénominateur, le terme en j est nul (condition de résonance). On obtient donc la formule :

$$Z = \frac{L}{CR}$$

Hors résonance, l'impédance du circuit parallèle est égale à :

$$Z = \frac{L}{CZ\ \text{série}}$$